

問3の(3)別解

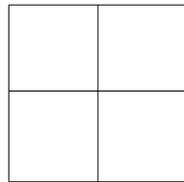
ここでは、問3の(3)

3 m × 4 m の長方形の土地に木を6本植える。互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下となる2本の木があることを示せ。

について別解を与える。まず、次が言える。

1辺が a m の正方形の土地に木を5本植える。互いの距離が $\frac{a}{\sqrt{2}}$ m 以下となる2本の木がある。… (*)

なぜなら、下図のように正方形を1辺が $\frac{a}{2}$ m の4つの小正方形に分割すると、木は5本あるので、いずれかの小正方形の中に2本入る。小正方形の中の2点の距離は必ず $\frac{a}{\sqrt{2}}$ m 以下であるから。



これを用いると以下のように問3の(3)を解くことができる。3 m × 4 m の長方形を1辺が1 m の12個の小正方形に分割し、下図のように頂点に A,B,C,D,E,F,G,H と名前をつけ、6つの小正方形に s, t, u, v, x, y と名前をつける。

どの2本も距離が $\sqrt{5}$ m より大きくなるような木の植え方があるとする。一辺が3 m の正方形 EBCH の中に5本以上入るとすると、(*)より、2本は距離が $\frac{3}{\sqrt{2}}$ m 以下になるが、 $\frac{3}{\sqrt{2}} < \sqrt{5}$ だからこれはありえない。よって、正方形 EBCH の中に4本以下しか入らない。ゆえに、長方形 AEHD 中に2本以上入る。一方、2 m × 1 m の長方形は対角線の長さが $\sqrt{5}$ m なので、その中に2本の木は入れない。したがって、木は小正方形 s と t に1本ずつ入る。同様にして、小正方形 u と v の中に1本ずつ入る。更に同様な考察で、残りの2本は小正方形 x と y の中に入ることになるが、この2つは1 m × 2 m の長方形をなすので、これもありえない。

以上より、互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下となる2本の木があることを示すことができた。

